PART3　2次関数の決定

3 (1)　放物線 $y=-2x^2-3x+4$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 5)$ を通り，頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるような放物線の方程式を求めよ。

(2)　定義域を $-2\leqq x\leqq 1$ とする関数 $f(x)=ax^2+2ax+b$ の最大値が 6，最小値が 3 であるとき，定数 a，b の値を求めよ。

Point Pickup

(1)　放物線の頂点に関する条件が与えられたときは, $y=a(x-p)^2+q$ の形で考えるとよい。直線 $y=2x+1$ 上にある点は $(p,\ 2p+1)$ と表される。

(2)　2 次関数の最大・最小に関する条件が与えられたときは，グラフが上に凸か下に凸か，および頂点と端点の座標を考えるとよい。

第 4 講　PART3　確認問題

1　放物線 $y=2x^2-1$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 1)$ を通り，その頂点が直線 $y=-x+3$ 上にあるような放物線の方程式を求めよ。

$$y=\boxed{\text{ア}}\left(x-\boxed{\text{イ}}\right)^2+\boxed{\text{ウ}}\quad \text{または}$$

$$y=\boxed{\text{エ}}\left(x-\frac{\boxed{\text{オ}}}{\boxed{\text{カ}}}\right)^2+\frac{\boxed{\text{キ}}}{\boxed{\text{ク}}}$$

2　定義域を $1 \leqq x \leqq 4$ とする関数 $f(x)=ax^2-4ax+b$ の最大値が 12, 最小値が 4 であるとき, 定数 a, b の値を求めよ。

$$(a,\ b)=\left(\boxed{\text{ケ}},\ \boxed{\text{コサ}}\right),\ \left(\boxed{\text{シス}},\ \boxed{\text{セ}}\right)$$

PART3　2次関数の決定

3 (1) 放物線 $y=-2x^2-3x+4$ を平行移動したもので，点 $(2,\ 5)$ を通り，頂点が直線 $y=2x+1$ 上にあるような放物線の方程式を求めよ。

(2) 定義域を $-2\leqq x\leqq 1$ とする関数 $f(x)=ax^2+2ax+b$ の最大値が 6，最小値が 3 であるとき，定数 $a,\ b$ の値を求めよ。

(1) 求める放物線の頂点は直線 $y=2x+1$ 上の点であるから，$(p,\ 2p+1)$ とおける。
さらに求める放物線は，放物線 $y=-2x^2-3x+4$ を平行移動したものであることから
求める放物線の方程式は　$y=-2(x-p)^2+2p+1$　とおける。
これが点 $(2,\ 5)$ を通るから

$$5=-2(2-p)^2+2p+1 \qquad p^2-5p+6=0 \qquad p=2,\ 3$$

よって，求める放物線の方程式は　$y=-2(x-2)^2+5$，$y=-2(x-3)^2+7$

(2) $a=0$ のとき　$f(x)=b$　これは x の値に関わらず一定であるから不適。
$a\neq 0$ のとき　$f(x)$ は 2 次関数である。

$$f(x)=ax^2+2ax+b=a(x+1)^2-a+b$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの軸は $x=-1$ であり，定義域 $-2\leqq x\leqq 1$ に含まれる。
$a>0$ のとき
$f(x)$ のグラフは下に凸の放物線
よって，最大値は $f(1)=3a+b$，最小値は $f(-1)=-a+b$ であることにより

$$3a+b=6,\quad -a+b=3$$

これを解くと $a=\dfrac{3}{4}$，$b=\dfrac{15}{4}$　これは $a>0$ を満たす。

$a<0$ のとき
$f(x)$ のグラフは上に凸の放物線
よって，最大値は $f(-1)=-a+b$，最小値は $f(1)=3a+b$ であることにより

$$-a+b=6,\quad 3a+b=3$$

これを解くと　$a=-\dfrac{3}{4}$，$b=\dfrac{21}{4}$　これは $a<0$ を満たす。

以上より　$(a,\ b)=\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{15}{4}\right)$，$\left(-\dfrac{3}{4},\ \dfrac{21}{4}\right)$

第 4 講　PART3　確認問題 解答

1 **[正解]** ア：2，イ：2，ウ：1，エ：2，オ：5，
カ：2，キ：1，ク：2

[解説]

求める放物線の頂点は直線 $y=-x+3$ 上の点であるから，$(p,\ -p+3)$ とおける。[A]

さらに，求める放物線は放物線 $y=2x^2-1$ を平行移動したものであるから，その方程式は

$$y=2(x-p)^2-p+3 \quad \text{[B]}$$

とおける。これが点 $(2,\ 1)$ を通るから

$$1=2(2-p)^2-p+3$$

$$2p^2-9p+10=0$$

$$(p-2)(2p-5)=0$$

よって　$p=2,\ \dfrac{5}{2}$

ゆえに　$-p+3=1,\ \dfrac{1}{2}$

したがって，求める放物線の方程式は

$$\boldsymbol{y=2(x-2)^2+1} \quad \textbf{または} \quad \boldsymbol{y=2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{1}{2}}$$

[A]　直線 $y=ax+b$ 上にある点は，$(p,\ ap+b)$ と表される。

[B]　放物線の頂点に関する条件が与えられたときは，$y=a(x-p)^2+q$ の形で考えるとよい。

2　**[正解]** ケ：2，コサ：12，シス：-2，セ：4

[解説]

$a=0$ のとき　$f(x)=b$

これは x の値に関わらず一定であるから不適。

$a\neq 0$ のとき　$f(x)$ は2次関数である。

$$f(x)=ax^2-4ax+b=a(x-2)^2-4a+b$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの軸は直線 $x=2$ であり，

定義域 $1\leqq x\leqq 4$ に含まれる。

$a>0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは下に凸の放物線である。 [C]

よって，最大値は $f(4)=b$，

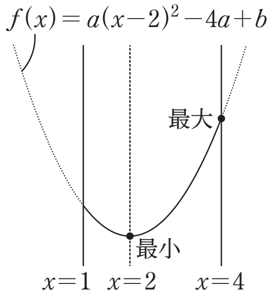
最小値は $f(2)=-4a+b$ であることから

$$b=12,\quad -4a+b=4$$

これを解くと

$$a=2,\quad b=12$$

これは $a>0$ を満たす。



$a<0$ のとき

$y=f(x)$ のグラフは上に凸の放物線である。

よって，最大値は $f(2)=-4a+b$，

最小値は $f(4)=b$ であることから

$$-4a+b=12,\quad b=4$$

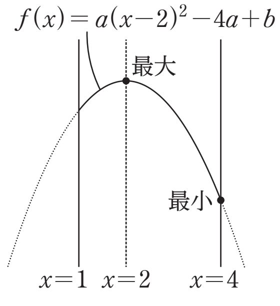
これを解くと

$$a=-2,\quad b=4$$

これは $a<0$ を満たす。

以上より

$(a,\ b)=(2,\ 12),\ (-2,\ 4)$



[C]　2次関数の最大・最小に関する条件が与えられたときは，グラフが上に凸か下に凸か，および頂点と端点の座標を考えるとよい。